

特约稿件

Banach 空间中平均非扩张集值映射的稳定点

陈丽丽¹, 高璐¹, 周晶²

(1. 哈尔滨理工大学 应用数学系, 黑龙江 哈尔滨 150080;

2. 哈尔滨工业大学 数学系, 黑龙江 哈尔滨 150001)

摘 要: 集值映射的不动点理论在近代变分问题、最优化问题、经济均衡问题等研究中发挥着极其重要的作用, 已成为非线性泛函分析理论的重要组成部分。为了研究 Banach 空间中平均非扩张集值映射的稳定点问题, 我们依据集值映射的不动点理论, 利用渐近稳定点序列、渐近中心、渐近半径等给出了平均非扩张集值映射具有稳定点的充分必要条件。

关键词: 稳定点; 平均非扩张集值映射; 渐近稳定点序列; 渐近中心; Banach 空间

DOI: 10.15938/j.jhust.2018.01.025

中图分类号: O177.2 文献标志码: A 文章编号: 1007-2683(2018)01-0137-06

On Stationary Points of Mean Nonexpansive Set-valued Mappings in Banach Spaces

CHEN Li-li¹, GAO Lu¹, ZHOU Jing²

(1. Department of Applied Mathematics, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China;

2. Department of Mathematics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: The fixed point theory of the set-valued mappings has important applications in many branches such as modern variation problems, optimization problems and economic equilibrium problems, and it has been an essential part of nonlinear functional analysis theory. In order to study the problem of the stationary points of the mean nonexpansive set-valued mappings in Banach spaces, we based on Fixed Point Theory of the set-valued mapping, by use of the asymptotic stationary points sequence, the asymptotic center and the asymptotic radius, the necessary and sufficient conditions for the mean nonexpansive set-valued mappings which have the stationary points are obtained.

Keywords: stationary point; mean nonexpansive set-valued mapping; asymptotic stationary points sequence; asymptotic center; Banach space

收稿日期: 2016-05-13

基金项目: 国家自然科学基金(11401141); 黑龙江省青年自然科学基金(QC2013C001); 黑龙江省博士后科研资助项目(LBH-Z15098); 黑龙江省教育厅科学技术研究项目(12531099)。

作者简介: 高璐(1992—), 女, 硕士研究生;

周晶(1988—), 女, 博士研究生。

通信作者: 陈丽丽(1982—), 女, 博士, 副教授, E-mail: cll2119@hotmail.com.

0 引言

20 世纪 30 年代初,人们开始关注集值映射的不动点问题,将 Brouwer 不动点定理、Schauder 不动点定理等结果推广到集值映射的情形。近四十年来,集值映射的不动点理论在近代变分问题、最优化问题、经济均衡问题等研究中发挥着极其重要的作用,数学家 Debreu 正是以集值映射的不动点定理为工具给出 Walras 完全竞争均衡存在定理的严格证明,因此于 1983 年获得诺贝尔经济学奖。1968 年 Markin^[1] 在 Hilbert 空间中推广 Brouwer 定理到非扩张集值映射的情形,1969 年 Nadler^[2] 将 Banach 压缩映射原理进行了推广,1974 年 Lim^[3] 利用 Edelstein 方法给出了一致凸 Banach 空间中非扩张集值映射的不动点定理,1990 年 Kirk^[4] 和 Massa 将 Lim 定理进行了推广,2003 年 Benavides 利用非紧凸性模研究了非扩张集值映射的不动点等问题^[5-7]。

集值映射作为一类特殊的多值映射,在研究其不动点性质、算法的构造和收敛性条件及不动点序列的选取等问题相比于单值映射更为复杂,目前对该理论的研究尚不完备,对于平均非扩张集值映射的稳定点存在性等问题尚未解决。研究发现稳定点的存在性问题很大程度上都依赖于集值映射是压缩的^[8-11],近年来,该问题引起了国内外数学学者的关注,开始尝试利用渐近稳定点序列等方法来解决广义非扩张集值映射的稳定点问题^[12-14](强渐近不动点序列在这里也称为渐近稳定点序列^[14]),渐近稳定点序列在寻找稳定点时扮演了十分重要的角色^[15-18]。本文主要借助 Banach 空间的几何性质,将非扩张集值映射的稳定点问题推广到平均非扩张集值映射的情形,利用渐近稳定点序列、渐近中心、渐近半径等概念给出了平均非扩张集值映射具有稳定点的充分必要条件。

1 预备知识

设 X 是一完备的度量空间, C 是 X 的非空子集,集值映射 $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\emptyset\}$ 称为平均非扩张集值映射是指若 $\forall x, y \in C$, 满足

$$H(Tx, Ty) \leq ad(x, y) + bd(x, Ty) + cd(x, Tx)$$

其中 $H(\cdot, \cdot)$ 表示 Hausdorff 距离, $a, b, c, \geq 0$, 且 $a + b + c \leq 1$ 。若 $b, c = 0, a = 1$, 称 T 为非扩张集值

映射; 若 $b, c = 0, 0 < a < 1$, 称 T 为压缩集值映射。

$H(\cdot, \cdot)$ 的定义为

$$H(A, B) = \max\{\sup_{a \in A} d(a, B), \sup_{b \in B} d(b, A)\}$$

其中

$$d(a, B) = \inf_{x \in B} d(a, x)$$

若 $x \in Tx$, 则元素 $x \in C$ 称为 T 的不动点。若 $Tx = x$, 则元素 $x \in C$ 称为 T 的稳定点。

设 X 是 Banach 空间, C 是 X 的非空有界闭凸子集。 $B_r(x)$ 是以 x 为中心, r 为半径的闭单位球。 $F(X)$ 表示 X 的非空闭子集的全体, $K(X)$ 表示 X 的非空紧子集的全体。 x 到 C 的距离为

$$d(x, C) = \inf_{a \in C} d(x, a)$$

C 关于 x 的切比雪夫半径为

$$r_x(C) = \sup_{z \in C} \|x - z\|$$

C 关于 A 的切比雪夫半径为

$$r_A(C) = \inf_{a \in A} r_a(C)$$

C 的切比雪夫中心为

$$Z(C) = \{x \in C: r_x(C) = \inf_{z \in C} r_z(C)\}$$

设 $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\emptyset\}$ 是平均非扩张集值映射, 我们称 C 中的序列 (x_n) 是渐近稳定点序列, 若满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_{x_n}(Tx_n) = 0$$

(x_n) 称为渐近不动点序列, 若满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, Tx_n) = 0$$

定理 1^[2] (Nadler 定理) 设 X 是 Banach 空间, C 是 X 的非空有界闭凸子集, $T: C \rightarrow F(C)$ 是非扩张集值压缩映射, 则 T 在 C 中存在不动点。

设 (x_n) 是 X 中的有界序列, $r_a(C, \{x_n\})$ 表示 (x_n) 关于 C 的渐近半径, $Z_a(C, \{x_n\})$ 表示 (x_n) 关于 C 的渐近中心, $\varepsilon_0(X)$ 是 Banach 空间 X 的凸系数, 它们有如下定义

$$r_a(C, \{x_n\}) = \inf_{x \in C} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$$

$$Z_a(C, \{x_n\}) = \{z \in C: \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = r_a(C, \{x_n\})\}$$

$$\varepsilon_0(X) = \sup\{\varepsilon > 0: \delta_X(\varepsilon) = 0\}$$

$\delta_X: [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ 是 Banach 空间 X 的凸性模, 它的定义为

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\|: \|x\| \leq 1, \|y\| \leq 1, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}$$

Banach 空间 X 具有 Opial 性质是指若每个弱收敛于 0 的序列 $\{x_n\}$ 和任意非零向量 $x \in X$, 都有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| < \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\|$$

成立。

设 (x_n) 是 X 中的有界序列, 称 C 是正则的是指

若 (x_n) 的所有子列关于 C 的渐近半径都相同, 即

$$r_a(C, \{x_n\}) = r_a(C, \{x_{n_i}\}), \forall x_{n_i} \subseteq x_n$$

Banach 空间 X 具有 DL 条件是指若存在 $\lambda \in [0, 1)$ 使得 X 中每个弱紧凸子集 C 及 C 中的任意有界序列 $(x_n), (x_{n_i})$ 关于 C 是正则的且满足

$$r_C(Z_a(C, \{x_n\})) \leq \lambda r_a(C, \{x_{n_i}\})$$

X 的有界子集 D 关于 C 的切比雪夫半径为

$$r_C(D) = \inf\{r_x(D) : x \in C\}$$

2 主要结果

定义1 设 $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\emptyset\}$, 则

1) C 的子集 D 称为 T 不变集是指若

$$Tx \subseteq D, \forall x \in D$$

2) C 的子集 D 称为弱 T 不变集是指若

$$Tx \cap D \neq \emptyset, \forall x \in D$$

注: 对于单值映射这两个概念是一致的。

C 的非空闭凸子集 D 称为最小 T 不变集(最小弱 T 不变集)是指不存在 D 的非空 T 不变(弱 T 不变)闭凸真子集。

我们首先研究具有正规结构的 Banach 空间中平均非扩张集值映射的稳定点存在性问题。

定义2 Banach 空间 X 具有正规结构(弱正规结构)是指若 X 的任一非空有界闭(弱紧)集 C , 且 $\text{diam}(C) > 0$, 存在 $x \in C$ 使得

$$r_x(C) < \text{diam}(C)$$

Banach 空间 X 的非空凸子集 C 具有正规结构是指若 C 的任一非空闭凸子集 D , 且 $\text{diam}(D) > 0$, 存在 $x \in D$ 使得

$$r_x(D) < \text{diam}(D)$$

命题1^[9] 设 C 是 Banach 空间 X 中的任一弱紧凸子集, 则 C 的切比雪夫中心 $Z(C)$ 是 C 的非空闭凸子集。

命题2^[9] 设 X 是 Banach 空间且具有正规结构, C 是 X 的弱紧凸子集, 则

$$\text{diam}(Z(C)) < \text{diam}(C)$$

下面的结果可以看成 Kirk 不动点定理的推广形式。

定理2 设 X 是 Banach 空间, 且具有正规结构, C 是 X 的非空弱紧凸子集。则平均非扩张集值映射 $T: C \rightarrow K(C)$ 具有稳定点当且仅当存在 C 中的非空闭凸子集 F 是最小弱 T 不变和最小 T 不变的。证明: 必要性: 显然, 若 T 具有稳定点 x , 设 $F = \{x\}$, 则 F 是 C 的非空闭凸子集且 F 是最小弱 T 不变和

最小 T 不变的。

充分性: 设 F 是 C 的非空闭凸子集且是最小弱 T 不变和最小 T 不变的。若 $\text{diam}(F) = 0$, 则 F 中的元素为平均非扩张映射 T 的稳定点。不妨设 $\text{diam}(F) > 0$, 由命题1可知 $Z(F)$ 是非空弱紧凸集, 要证 $Z(F)$ 是 T 不变的, 只需证

$$\forall x \in Z(F), Tx \subseteq Z(F)$$

对任意 $x \in Z(F), y \in F$ 及 $z \in Tx, w \in Ty$ 有

$$\begin{aligned} \|z - w\| &\leq H(Tx, Ty) \leq \\ &ad(x, y) + bd(x, Ty) + cd(x, Tx) \leq \\ &ar_x(F) + br_x(F) + cr_x(F) = \\ &(a + b + c)r_x(F) \leq \\ &r_x(F) = r(F) \end{aligned}$$

因为 F 是 T 不变的, 故 $w \in F$ 。因此, $B_r(F)[z] \cap F \cap Ty \neq \emptyset$ 。由 y 的任意性, 得 $B_r(F)[z] \cap F$ 是弱 T 不变的。另一方面, F 是最小弱 T 不变的, $B_r(F)[z] \cap F$ 是非空弱紧凸集且是弱 T 不变的, 所以 $B_r(F)[z] \cap F = F$ 。从而 $F \subseteq B_r(F)[z]$, 故 $\|x - z\| \leq r(F), \forall x \in F$, 从而 $r_z(F) \leq r(F)$, 则 $z \in Z(F)$ 。由 z 的任意性, 可得 $Tx \subseteq Z(F)$, 所以 $Z(F)$ 是 T 不变的。由命题2可知

$$\text{diam}(Z(F)) < \text{diam}(F)$$

与 F 是最小 T 不变的矛盾。

定理3 设 X 是 Banach 空间, C 是 X 的非空弱紧凸子集, $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\emptyset\}$ 是没有稳定点的平均非扩张集值映射, 其中 $a, b, c \geq 0$, 且 $a + b + 2c \leq 1$, C 是 T 不变的。则存在 $\alpha > 0$ 和 T 的最小非空弱紧凸且 T 不变子集 E , 使得对任意 $z \in E$ 和 E 中任意渐近稳定点序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \geq \alpha$$

证明: 设 Σ 是 C 的所有非空弱紧凸且 T 不变子集的全体, 则 $\Sigma \neq \emptyset$, 因为 $C \in \Sigma$ 。通过集合的包含关系可定义偏序, 由 Zorn 引理可知, E 是 Σ 中的最小元。

不妨设 $\text{diam}(E) > 0$, 否则由 E 是 T 不变的, 可得 T 具有稳定点矛盾。

若对任意 $\alpha > 0$, 存在 $z \in E$ 和 E 中渐近稳定点序列 (x_n) 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| < \alpha$$

选取 $r > 0$ 使得

$$2r < \text{diam}(E)$$

存在 $z_0 \in E$ 和 E 中渐近稳定点序 (x_n) 使得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z_0\| < r$$

令

$$D = \{z \in E: \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \leq r\}$$

则 D 是 E 的非空闭凸子集。要证 D 是 T 不变的, 往证对任意 $x \in D$, 有 $Tx \subseteq D$ 。即对任意的 $z \in Tx$, 下证 $z \in D$ 。

对任意的 $y \in Tx_n$, 有

$$\|x_n - z\| \leq \|x_n - y\| + \|y - z\| \leq r_{x_n}(Tx_n) + \|y - z\|$$

由 y 的任意性, 有

$$\begin{aligned} \|x_n - z\| &\leq r_{x_n}(Tx_n) + d(z, Tx_n) \leq \\ &r_{x_n}(Tx_n) + H(Tx, Tx_n) \leq \\ &r_{x_n}(Tx_n) + a\|x - x_n\| + \\ &bd(x, Tx_n) + cd(x, Tx) \leq \\ &r_{x_n}(Tx_n) + a\|x - x_n\| + b\|x - x_n\| + \\ &br_{x_n}(Tx_n) + c\|x - x_n\| + cd(x_n, Tx) \leq \\ &r_{x_n}(Tx_n) + a\|x - x_n\| + b\|x - x_n\| + \\ &br_{x_n}(Tx_n) + c\|x - x_n\| + c\|x_n - z\| \end{aligned}$$

则

$$(1-c)\|x_n - z\| \leq r_{x_n}(Tx_n) + a\|x - x_n\| + b\|x - x_n\| + br_{x_n}(Tx_n) + c\|x - x_n\|$$

从而

$$\|x_n - z\| \leq \frac{a+b+c}{1-c}\|x - x_n\| + \frac{1}{1-c}r_{x_n}(Tx_n) + \frac{b}{1-c}r_{x_n}(Tx_n)$$

故

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \leq \frac{(a+b+c)}{1-c} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|$$

由 $a+b+2c \leq 1$, 得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| \leq r$$

则 D 是 T 不变的。

又

$$\text{diam}(D) \leq 2r < \text{diam}(E)$$

所以 D 是 E 的非空弱紧凸且 T 不变的真子集, 可得 $D \in \Sigma$, 与 E 是 Σ 中最小 T 不变的矛盾。

我们立即有了下面的结果:

推论 1 设 X 是 Banach 空间, C 是 X 的非空弱紧凸子集且 $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\varphi\}$ 是不具有稳定点的平均非扩张集值映射, 则存在 $\alpha > 0$ 和 C 的非空弱紧凸 T 不变子集 D , 使得对 D 的任意紧子集 A 和 D 中的渐近稳定点序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r_{x_n}(A) \geq \alpha$$

证明: 由定理 3 可知, 存在 $\alpha > 0$ 和 C 的非空弱紧凸子集 D 使得 D 中的任意渐近稳定点序列 (x_n) 和任

意 $z \in D$ 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \geq \alpha$$

假设对任意的 $\alpha > 0$ 和 C 的任意非空弱紧凸子集 D , 存在 D 的紧子集 A 和 D 中的渐近稳定点序列 $(x_n)_{n=1}^\infty$ 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} r_{x_n}(A) < \alpha$$

由于 A 是紧的, 故对任意 $n \in \mathbb{N}$, 存在 $y_n \in A$, 使得 $r_{x_n}(A) = \|x_n - y_n\|$ 。又由 A 是紧的, 我们可以找到 (y_n) 的子列 (y_{n_k}) 收敛于 z , 且 $z \in A$ 。因此

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \|x_{n_k} - z\| = \limsup_{n \rightarrow \infty} r_{x_n}(A) < \alpha$$

产生矛盾。

定理 4^[9] 设 (x_n) 是 Banach 空间 X 中的有界序列, C 是 X 的非空弱紧凸子集, 则 $Z_a(C, \{x_n\})$ 是非空凸集。

定理 5^[9] 设 C 是 Banach 空间 X 中的非空闭凸子集且 (x_n) 是 X 中的有界序列, 则

$$\text{diam}(Z_a(C, \{x_n\})) \leq \varepsilon_0(X) r_a(C, \{x_n\})$$

定理 6^[9] 若 $\varepsilon_0(X) \leq 1$, 则 X 具有正规结构。

定义 3 设 X 是 Banach 空间, C 是 X 的非空闭凸子集, $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\varphi\}$ 是平均非扩张集值映射, 则称 T 在 C 中具有渐近稳定点序列性质是指若 T 在 C 的任意 T 不变非空闭凸子集中都有一渐近稳定点序列。

定理 7 设 X 是 Banach 空间, 它的凸系数 $\varepsilon_0(X) \leq 1$, C 是 X 中的非空弱紧凸子集, $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\varphi\}$ 是平均非扩张集值映射, 其中 $a, b, c, \geq 0$, 且 $a + b + 2c \leq 1$, 则 T 具有稳定点当且仅当 T 在 C 中具有渐近稳定点序列性质。

证明: 必要性: 显然成立。

充分性: 假设 T 没有稳定点, 由定理 7 可知 C 有一非空弱紧凸最小 T 不变子集 E , 设 (x_n) 是 E 中的渐近稳定点序列, 由定理 11 得 X 具有正规结构。因此, 固定 $x_0 \in E$ 使得

$$r_{x_0}(E) \in \text{diam}(E)$$

由定理 9 知 $Z_a(E, \{x_n\})$ 是非空的。下证 $Z_a(E, \{x_n\})$ 是 T 不变的。往证对任意 $x \in Z_a(E, \{x_n\})$, 有 $Tx \in Z_a(E, \{x_n\})$, 即对任意 $z \in Tx$, 有

$$z \in Z_a(E, \{x_n\})$$

显然

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \geq r_a(E, \{x_n\})$$

往证

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \leq r_a(E, \{x_n\})$$

对任意 $y \in Tx_n$, 有

$$\|x_n - z\| \leq \|x_n - y\| + \|y - z\| \leq r_{x_n}(Tx_n) + \|y - z\|$$

由 y 的任意性, 可得

$$\begin{aligned} \|x_n - z\| &\leq r_{x_n}(Tx_n) + d(z, Tx_n) \leq \\ &r_{x_n}(Tx_n) + H(Tx, Tx_n) \leq \\ &r_{x_n}(Tx_n) + a\|x - x_n\| + bd(x, Tx_n) + \\ &cd(x, Tx) \leq \\ &r_{x_n}(Tx_n) + a\|x - x_n\| + b\|x - x_n\| + \\ &br_{x_n}(Tx_n) + c\|x - x_n\| + cd(x_n, Tx) \leq \\ &r_{x_n}(Tx_n) + a\|x - x_n\| + b\|x - x_n\| + \\ &br_{x_n}(Tx_n) + c\|x - x_n\| + c\|x_n - z\| \end{aligned}$$

则

$$(1-c)\|x_n - z\| \leq r_{x_n}(Tx_n) + a\|x - x_n\| + b\|x - x_n\| + br_{x_n}(Tx_n) + c\|x - x_n\|$$

从而

$$\|x_n - z\| \leq \frac{a+b+c}{1-c}\|x - x_n\| + \frac{1}{1-c}r_{x_n}(Tx_n) + \frac{b}{1-c}r_{x_n}(Tx_n)$$

故

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \leq \frac{a+b+c}{1-c} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\|$$

由 $a+b+2c \leq 1$, 得

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x - x_n\| = r_a(E, \{x_n\})$$

故 $Z_a(E, \{x_n\})$ 是 T 不变的。

又

$$\begin{aligned} r_a(E, \{x_n\}) &= \inf_{x \in E} \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| \leq \\ &\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x_0\| < \\ &r_{x_0}(E) < \text{diam}(E) \end{aligned}$$

由定理 10 和 $\varepsilon_0(X) \leq 1$, 可得

$$\text{diam}(Z_a(E, \{x_n\})) \leq r_a(E, \{x_n\})$$

因为

$$r_a(E, \{x_n\}) < \text{diam}(E)$$

所以

$$\text{diam}(Z_a(E, \{x_n\})) < \text{diam}(E)$$

且 $Z_a(E, \{x_n\})$ 是弱紧凸 T 不变子集, 从而与 E 是最小 T 不变的矛盾。

定理 8 [2] X 是具有 Opial 性质的 Banach 空间, 则 X 具有弱正规结构。

定理 9 设 X 是具有 Opial 性质的 Banach 空间, C 是 X 中的非空弱紧凸子集, $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\varphi\}$ 是平均非扩张集值映射, 其中 $a, b, c, \geq 0$, 且 $a+b+2c \leq 1$, 则 T 具有稳定点当且仅当 T 在 C 中具有渐近

稳定点序列性质。

证明: 必要性: 显然成立。

充分性: 假设 T 没有稳定点, 由定理 3 知, C 有一非空弱紧凸最小 T 不变子集 E 。设 (x_n) 是 E 中渐近稳定点序列, 且 (x_n) 弱收敛于 x 。

因为 $Z_a(\{x_n\}, E) = \{z \in E: \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = r_a(E, \{x_n\})\}$ 是 E 的非空弱紧凸子集且是 T 不变的 (可由定理 7 的证明过程得)。因为 E 是最小 T 不变的, 所以 $Z_a(\{x_n\}, E) = E$ 。因此, 对任意 $z \in E$, 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = r_a(E, \{x_n\})$$

X 具有 Opial 性质, 且 (x_n) 弱收敛于 x , 对任意 $z \in E$ 且 $z \neq x$, 有

$$\begin{aligned} r_a(E, \{x_n\}) &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - x\| < \\ &\limsup_{n \rightarrow \infty} \|x_n - z\| = \\ &r_a(E, \{x_n\}) \end{aligned}$$

产生矛盾。

定理 10 设 X 是 Banach 空间, C 是 X 中的有界闭凸子集, (x_n) 是 C 中有界序列, 则 (x_n) 关于 C 的渐近中心是非空紧的。设 $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\varphi\}$ 是平均非扩张集值映射且 C 弱紧, 其中 $a, b, c, \geq 0$, 且 $a+b+2c \leq 1$, 则 T 具有稳定点当且仅当 T 在 C 中具有渐近稳定点序列性质。

证明: 必要性: 显然成立。

充分性: 假设 T 没有稳定点, (y_n) 是 C 中任意序列, 且 (y_n) 是有界的, 由已知条件得 $Z_a(\{y_n\}, C)$ 是非空紧的, 由先前的证明可知, 渐近中心 $Z_a(\{y_n\}, C)$ 是 X 的非空弱紧凸 T 不变子集, 由 T 具有渐近稳定点序列性质得

$$\inf_{x \in Z_a(\{y_n\}, C)} r_x(Tx) = 0$$

再由 $Z_a(\{y_n\}, C)$ 是紧的, 可得 $Z_a(\{y_n\}, C)$ 中存在收敛于 x 的渐近稳定点序列 (x_n) 。

下证 x 是 T 的稳定点。

对任意 $z \in Tx$, 有

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\leq \|x_n - x\| + \|x_n - y\| + \|y - z\| \leq \\ &\|x_n - x\| + r_{x_n}(Tx_n) + \|y - z\| \end{aligned}$$

固定 $n \in N$, 对任意 $y \in Tx_n$, 有

$$\begin{aligned} \|x - z\| &\leq \|x_n - x\| + r_{x_n}(Tx_n) + d(z, Tx_n) \leq \\ &\|x_n - x\| + r_{x_n}(Tx_n) + H(Tx, Tx_n) \leq \\ &\|x_n - x\| + r_{x_n}(Tx_n) + a\|x - x_n\| + \\ &bd(x, Tx_n) + cd(x, Tx) \leq \\ &\|x_n - x\| + r_{x_n}(Tx_n) + a\|x - x_n\| + \\ &b\|x - x_n\| + br_{x_n}(Tx_n) + c\|x - z\| \end{aligned}$$

则

$$(1-c) \|x-z\| \leq \|x_n-x\| + r_{x_n}(Tx_n) + a \|x-x_n\| + b \|x-x_n\| + br_{x_n}(Tx_n)$$

从而

$$\|x-z\| \leq \frac{1}{1-c} (1+a+b) \|x_n-x\| + \frac{1}{1-c} r_{x_n}(Tx_n) + \frac{b}{1-c} r_{x_n}(Tx_n)$$

由 $z \in Tx$ 是任意的, 则

$$r_x(Tx) \leq \frac{1}{1-c} (1+a+b) \|x_n-x\| + \frac{1}{1-c} r_{x_n}(Tx_n) + \frac{b}{1-c} r_{x_n}(Tx_n)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时得, $r_x(Tx) = 0$ 。

从而 $TX = \{x\}$ 矛盾。

推论 2 设 X 是一致凸 Banach 空间, 则定理 10 的结论成立。

定理 11 [2] 满足 (DL) 条件的 Banach 空间具有弱正规结构。

命题 3 [2] 设 C 是 Banach 空间 X 中的非空有界子集, $\{x_n\}$ 是 X 中的有界序列, 则 $\{x_n\}$ 有一子列关于 C 是正则的。

定理 12 设 X 是满足 (DL) 条件的 Banach 空间, $T: C \rightarrow 2^C \setminus \{\emptyset\}$ 是平均非扩张集值映射, 其中 $a, b, c, \geq 0$, 且 $a+b+2c \leq 1$, C 是非空弱紧凸集, 则 T 具有稳定点当且仅当 T 在 C 中具有渐近稳定点序列性质。

证明: 必要性: 显然成立。

充分性: 假设 T 没有稳定点, 由定理 3 可得, 存在 C 的非空弱紧凸且最小 T 不变子集 E 和 $\alpha > 0$, 使得对 E 中的任意渐近稳定点序列 (z_n) 和 $z \in E$ 有

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z\| \geq \alpha$$

设 (x_n) 是 E 中渐近稳定点序列, 由命题 3 可知, 该序列关于 E 有一正则子列, 不妨仍记为 (x_n) 。因为 X 满足 (DL) 条件, 故

$$r_E(Z_a(E, \{x_n\})) \leq \lambda r_a(E, \{x_n\}), \lambda \in [0, 1]$$

又

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \|z_n - z\| \geq \alpha \quad (\forall z \in E) \text{ 因此}$$

$$\lambda r_a(E, \{x_n\}) < r_a(E, \{x_n\})$$

因为 $Z_a(E, \{x_n\})$ 是非空弱紧凸且 T 不变的, 且 $Z_a(E, \{x_n\}) \subseteq E$ 。由 E 是最小 T 不变的, 可得 $Z_a(E, \{x_n\}) = E$ 。

因此, 由

$$r_E(Z_a(E, \{x_n\})) \leq \lambda r_a(E, \{x_n\})$$

可得

$$r_E(E) \leq \lambda r_a(E, \{x_n\}) < r_a(E, \{x_n\})$$

产生矛盾。

3 结 语

本文主要解决了平均非扩张集值映射的稳定点问题, 讨论了满足各种几何性质的 Banach 空间中平均非扩张集值映射具有稳定点的充分必要条件。我们可以在此基础上继续利用 Banach 空间的几何性质研究平均非扩张集值映射具有稳定点的其它充分必要条件。

参 考 文 献:

- [1] MARKIN J. A Fixed Point Theorem for Set Valued Mappings [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1968(74): 39-640.
- [2] NADLER S B. Multi-valued Contraction Mappings [J]. Pacific J. Math, 1969(30): 475-488.
- [3] LIM T C. A Fixed Point Theorem for Multivalued Nonexpansive Mappings in a Uniformly Convex Banach Space [J]. Bull. Amer. Math. Soc, 1974(80): 1123-1126.
- [4] KIRK W A, MASSA S. Remarks on Asymptotic and Chebyshev Centers [J]. Houston J. Math., 1990, 16(3): 357-364.
- [5] DOMÍNGUEZ Benavides T, LORENZO Ramírez P. Fixed Point Theorems for Multi-valued Non-expansive Mappings Without Uniform Convexity [J]. Abstr. Appl. Anal, 2003(6): 375-386.
- [6] DOMÍNGUEZ Benavides T, LORENZO Ramírez P. Fixed Point Theorems for Multivalued Nonexpansive Mappings Satisfying Inward Ness Conditions [J]. Math. Anal. Appl, 2004, 291(1): 100-108.
- [7] ESPÍNOLA R, LORENZO Ramírez P, NICOLAE A. Fixed Points, Selections and Common Fixed Points for Nonexpansive-type Mappings [J]. Math. Anal. Appl., 2001, 382(2): 503-515.
- [8] AUBIN J P, SIEGEL J. Fixed Points and Stationary Points of Dissipative Multivalued Mappings [J]. Proc. Amer. Math. Soc., 1980(78): 391-398.
- [9] MORADI S, KHOJASTE H. Endpoints of Fweak and Generalized F-weak Contractive Mappings [J]. Filomat, 2012, 26(4): 725-732.
- [10] WŁODARCZYK K, KLIM D, PLEBANIAK R. Endpoint Theory for Set-valued Nonlinear Asymptotic Contractions with Respect to Generalized Pseudodistances in Uniform Spaces [J]. J. Math. Anal. Appl, 2008(339): 344-358.
- [11] WŁODARCZYK K, KLIM D, PLEBANIAK R. Existence and Uniqueness of Endpoints of Closed Set-valued Asymptotic Contractions in Metric Spaces [J]. J. Math. Anal. Appl, 2007(328): 46-57.
- [12] BUTSAN T, DHOMPONGSA S, TAKAHASHI W. A Fixed Point Theorem for Pointwise Eventually Nonexpansive Mappings in Nearly Uniformly Convex Banach Spaces [J]. Nonlinear Analysis, 2011, 74(5): 1694-1701.

(下转第 147 页)

- lectrodes [1]. *Advanced Materials*, 2013, 25(4): 591–565.
- [2] HSU YH, LAI CC, HO CL, et al. Preparation of Interconnected Carbon Nanofibers as Electrodes for Supercapacitors [J]. *Electrochimica Acta*, 2014, 127(1): 369–376.
- [3] WANG Y, WANG C, CHENG W, et al. Dispersing WO_3 in Carbon Aerogel Makes an Outstanding Supercapacitor Electrode Material [J]. *Carbon*, 2014(69): 287–293.
- [4] AN H F, WANG Y, WANG X, et al. Polypyrrole/carbon Aerogel Composite Materials for Supercapacitor [J]. *Power Sources*, 2010, 195(19): 6964–6969.
- [5] ZHAI Y, DOU Y, ZHAO D, et al. Carbon Materials for Chemical Capacitive Energy Storage [J]. *Advanced Materials*. 2011, 23(42): 4828–4850.
- [6] BHATTACHARJYA D, YU JS. et al. Activated Carbon Made From Cow Dung as Electrode Material for Electrochemical Double Layer Capacitor [J]. *J. Power Sources*, 2014, 262(15): 224–231.
- [7] JESSE S, RICHARD L. Flexible Supercapacitor Yarns with Coaxial Carbon Nanotube Network Electrodes [C] // *Materials Science and Engineering: B*, 2014, 184: 34–43.
- [8] 黄博, 孙现众, 张熊, 等. 活性炭基软包装超级电容器用有机电解液 [J]. *物理化学学报*, 2013, 29(9): 1998–2004.
- [9] GHOSH A, Lee Y H. Carbon-Based Electrochemical Capacitors [J]. *ChemSusChem*, 2012, 5(3): 480–499.
- [10] MDeraman, NSM Nor, NH Basri. et al. Graphene and Activated Carbon Based Supercapacitor Electrodes [C] // *Advanced Materials Research*, 2015: 231–235.

(编辑: 王 萍)

(上接第 142 页)

- [3] DHOMPONGSA S, NANAN N. Fixed Point Theorems by Ways of Ultra-asymptotic Centers [J]. *Abstr. Appl. Anal.*, 2011: 1–21. DOI: 826851.
- [4] GARCÍA Falset J, LLORENS Fuster E, MORENO GÁLVEZ E. Fixed Point Theory for Multivalued Generalized Nonexpansive Mappings [J]. *Appl. Anal. Discrete Math*, 2012, 6(2): 265–286.
- [5] PANYANAK B. Endpoints of Multivalued Nonexpansive Mappings in Geodesic Spaces [J]. *Fixed Point Theory and Applications*, 2015(147): 1–11.
- [6] SAEJUNG S. Remarks on Endpoints of Multivalued Mappings on Geodesic Spaces. Preprint.
- [7] RAFA E, MERAJ H, KOUROSH N. On Stationary Points of Nonexpansive Set-valued Mappings [J]. *Fixed Point Theory and Applications*, 2015(236): 1–13.
- [8] KHAMSI M A, KIRK W A. An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory [M]. *Pure and Applied Mathematics*, New York, Wiley-Interscience, 2001.
- [9] AGARWAL R P, O'REGAN D, SAHU D R. Fixed Point Theory for Lipschitzian-Type Mappings with Applications [M]. New York, 2009.
- [10] GOSSEZ J P, LAMI D E. Some Geometric Properties Related to the Fixed Point Theory for Nonexpansive Mappings [J]. *Pac. J. Math*, 1972(40): 565–573.
- [11] DHOMPONGSA S, DOMÍNGUEZ Benavides T, KAEWCHAROEN A, et al. The Jordan-von Neumann Constants and Fixed Points for Multivalued Nonexpansive Mappings [J]. *Math. Anal. Appl.*, 2006, 320(2): 916–927.
- [12] GOEBEL K. On a Fixed Point Theorem for Multivalued Nonexpansive Mappings [J]. *Ann. Univ. Mariae Curie-Skłodowska Sect. A*, 1975(29): 69–72.

(编辑: 关 毅)